Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 2

№1

Софья и Артемий вместе за сутки делают 0,5 кг малины за 9 мин.

тогда $v_{сд}$ (скорость поедания) $= \frac{\text{кол-во ягод}}{\text{время}} = \frac{0,5}{9} = v_С + v_А$, а

Рома и Артемий вместе 0,5 кг за 12 мин тогда $v_{Р+А} = \frac{0,5}{12} = v_Р + v_А$, а Софья и Рома 0,5 кг за 18 мин. тогда $v_{С+Р} = \frac{0,5}{18} = v_{С+Р}$. Тогда $v_{С+} + v_{А+Р} + v_{С+Р} = v_С + v_А + v_А + v_Р + v_Р + v_С = 2v_С + 2v_А + 2v_Р$

$= \frac{0,5}{9} + \frac{0,5}{12} + \frac{0,5}{18} = \frac{2+1,5+1}{36} = \frac{4,5}{36} = \frac{1}{8}$; тогда $v_С + v_А + v_Р =$

$= \frac{2v_С + 2v_А + 2v_Р}{2} = \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ — скорость поедания Софии, Артема и Ромы вместе, тогда они поедают 1 кг ягод малины за 16 мин, так как $S = vt$, где S - кол-во малины, v - скорость поедания, t - время за которое они едят. $\Rightarrow 1 = \frac{1}{16} t \Rightarrow t = 16$.

Ответ: 16

№2

$(y-2)(3x-12) = 5x^2 - 21x + 4$; $5x^2 - 15x - 3xy + 12y - 20 - 2(15+3y) \cdot x = 0$

$3xy - 12y - 6x + 24 = 5x^2 - 21x + 4$; $5x^2 - x(15+3y) + 12y - 20 = 0$ Квадратное уравнение, тогда $D = (-(15+3y))^2 - 4 \cdot 5 (12y - 20) = 225 + 90y + 9y^2 - 240y + 400 =$

$= 9y^2 - 150y + 625 = (3y - 25)^2 \Rightarrow x_1 = \frac{15+3y+3y-25}{10}$; $x_2 = \frac{15+3y-3y+25}{10}$

Можно использовать оборот листа для записи решений

$x_1 = 0{,}6y - 1$; $x_2 = y$ тогда $5x^2 - x(15+3y) + 12y - 20 =$

$= 5(x-y)(x-0{,}6y+1) = 0$

при $x = y$ y может быть любым числом $\Rightarrow$ ответ $(y;$ любое целое$)$

при $x = 0{,}6y - 1 \Rightarrow$ ~~$10x = 6y - 10$~~ $5x = 3y - 5$ здесь бесконечно много возможных пар целых чисел при каких $5x + 5 = 3y \Rightarrow 5(x+1) = 3y \Rightarrow (x+1) \vdots 3$ и $y \vdots 5$

$(0{,}6y - 1$ ~~такое что~~ $\vdots 5$; ~~y такой что $\vdots 3$~~ $\frac{5(x+1)}{3}$ ~~где $x+1 \vdots 3$~~ $)$

~~Ответ: $(y;$ любое целое$) \cup (0{,}6y - 1; \frac{5(x+1)}{3})$ где $0{,}6y - 1 \vdots 5$, а $(x+1) \vdots 3$ и x и y - целые числа.~~

Ответ $\begin{cases} (y;y) \\ y \text{ - целое любое} \end{cases} \cup \left((0{,}6y-1); \frac{5(x+1)}{3} \right)$

$\begin{cases} (0{,}6y-1) \vdots 5 \\ (x+1) \vdots 3 \\ x \text{ - целое} \\ y \text{ - целое} \end{cases}$

№4

$$\left| \frac{x(x^2-3) + (x+2)^2 - (x^3+6)}{x + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} - 1} \right| = a^2 + 1 ,$$

$$\left| \frac{x^3 - 3x + x^2 + 4x + 4 - x^3 - 6}{x + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}}{\sqrt{2}} - 1} \right| = a^2 + 1 ;$$

1) $x + 9 = 3$

$$\left| \frac{x^2 + x - 2}{x + 3 - 1} \right| = a^2 + 1 ;$$

$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

$$\left| \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)} \right| = a^2 + 1$$ ~~найти~~ $\Rightarrow$ ОДЗ $x \neq -2$

$|(x-1)| = a^2 + 1$ ~~когда если~~ $(x-1)$ положительное число

$a^2 + 1 \geq 1$ так как $a^2 \geq 0$ $1 = 1$

$|(x-1)| \geq 0$ - если модуль ~~равен~~ может принимать неотрицательное положительное значение

то исходное уравнение 2 решения ($|a| = a$; $|-a| = a$), а нам нужно 1 решение $\Rightarrow$ единственный такой случай, при $a^2 + 1 = 3$ тогда

$|(x-1)| = 3 \Rightarrow$ $x - 1 = 3$ или $1 - x = 3$

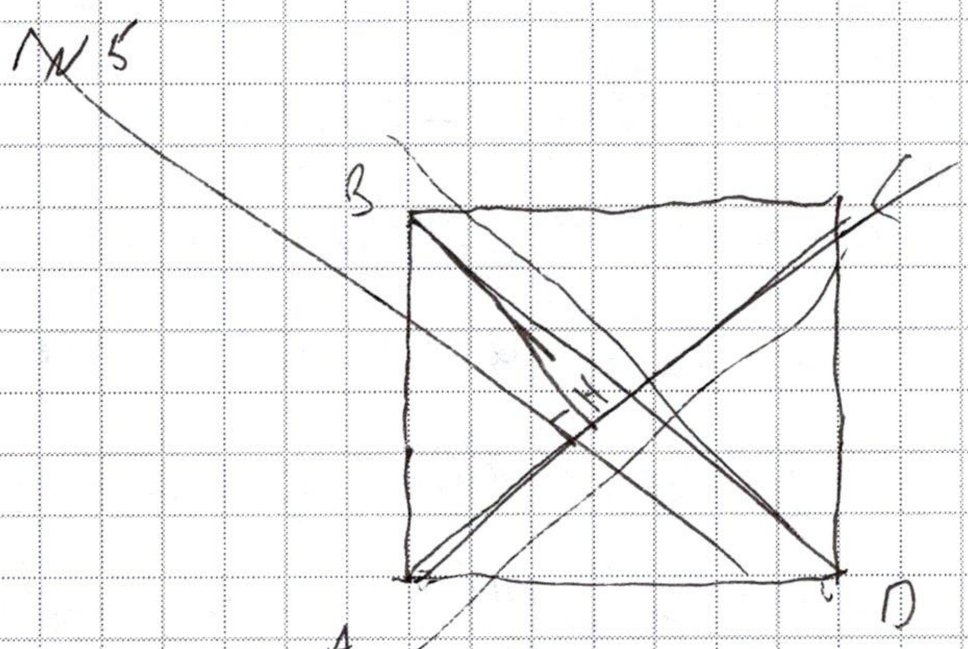
$x = 4$ $x = -2$ $\Rightarrow x = 4$, так как положительный $\Rightarrow$ решение нет

olymp.bmstu.ru

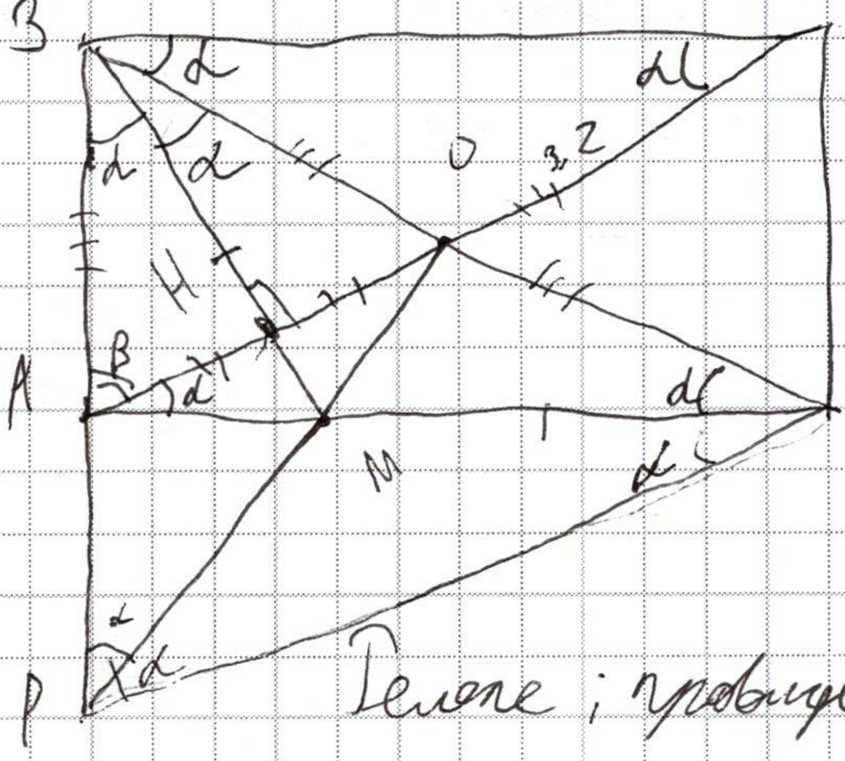
2) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{y} = -3$

$\frac{-x+x-2}{x-4}$

№5



№5



Дано

$AC = 3,2$

$ABCD$ - прямоугольник

$BM = MD$

BH - высота

Решение; проведем BD; AC и BD диагонали прямоугольника $\Rightarrow$

1) точка их пересечения делит их равные отрезки $\Rightarrow$ точка O середина

так что $BO = OD$; $AO = OC$. $\Rightarrow$ так как углы в прямоугольнике

равны $BO = OD = AO = OC$ ($\triangle BCD = \triangle ACD$ по двум сторонам) $\Rightarrow$ $AC = 3,2$,

$\Rightarrow$ и $AO = OC = \frac{3,2}{2} = 1,6 = BO = OD$, пусть $\angle OAD = \alpha$ тогда, $\angle BAO =$

равен $= \beta$ тогда $\angle \alpha = 90 \angle B = \angle OAD$; $\angle ABO = 90 - \beta \Rightarrow = \alpha$

Можно использовать оборот листа для записи решений

$\angle OAD = \angle OCB$ как накрестлежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCB = \angle\alpha \Rightarrow$ тогда $BO = OC$ $\triangle BOC$ равнобедренный, а следовательно $\angle CBO = \angle OCB = \angle\alpha$

$\triangle AOD$ - равнобедренный тогда $AO = OD$ (дважды) $\Rightarrow \angle OAD = \angle ODA = \angle\alpha \Rightarrow$ $\triangle ABMD$ - равнобедренный ($BM = MD$ (по условию)) $\Rightarrow \angle MBO = \angle\alpha \Rightarrow$, тогда $\angle ABH = \angle OBH$ и BH - высота $\Rightarrow$

$\triangle ABO$ - равнобедренный $\Rightarrow BH$ - медиана тогда $AH = HO$, а

$AH = HO = 4{,}6 \Rightarrow \underline{AH = 0{,}8}$.

2) MO - медиана $\triangle BMD$ (равнобедренный) $\Rightarrow MO$ - биссектриса, тогда в $\triangle PMD$ он является продолжением $PM \Rightarrow PO$ ~~не~~ высота, а $BO \perp OP$

$\Rightarrow \triangle PMD$ равнобедренный $\Rightarrow PM$ - биссектриса и $\angle PBO = \angle BPP = 2\angle\alpha$

$\angle BPP = \angle BDM + \angle PMDP = \angle\alpha + \angle MDP \Rightarrow \angle MDP = \angle\alpha$

тогда $\triangle$ прямоугольный $\triangle PDO$ PO - высота $\Rightarrow \angle PDO = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle PDO$ прямоугольный $\Rightarrow \angle OPD = 90 - 2\angle\alpha$, а так как $\angle ABC$

$= \angle ABH + \angle HBO + \angle OBC = \angle\alpha + \angle\alpha + \angle\alpha = 90 \Rightarrow \angle OPD = 3\angle\alpha - 2\angle\alpha = \angle\alpha$

по свойству PO биссектриса $\angle OPD = \angle OPB = \angle\alpha \Rightarrow \angle BPB = \angle BPD + \angle BPO =$

$= 2\angle\alpha = \angle PBD \Rightarrow \triangle PBD$ равнобедренный $\Rightarrow BD = P$ и равнобедренный

$\Rightarrow BD = \underline{PD = 3{,}2}$ Ответ: ~~0,8~~ а) 0,8 ; б) 3,2